Ansgar Schiffler

Übungsaufgabe zu ökonomischen Funktionen

Ein Unternehmen verkauft sein Produkt zum Preis von 13 GE / ME.

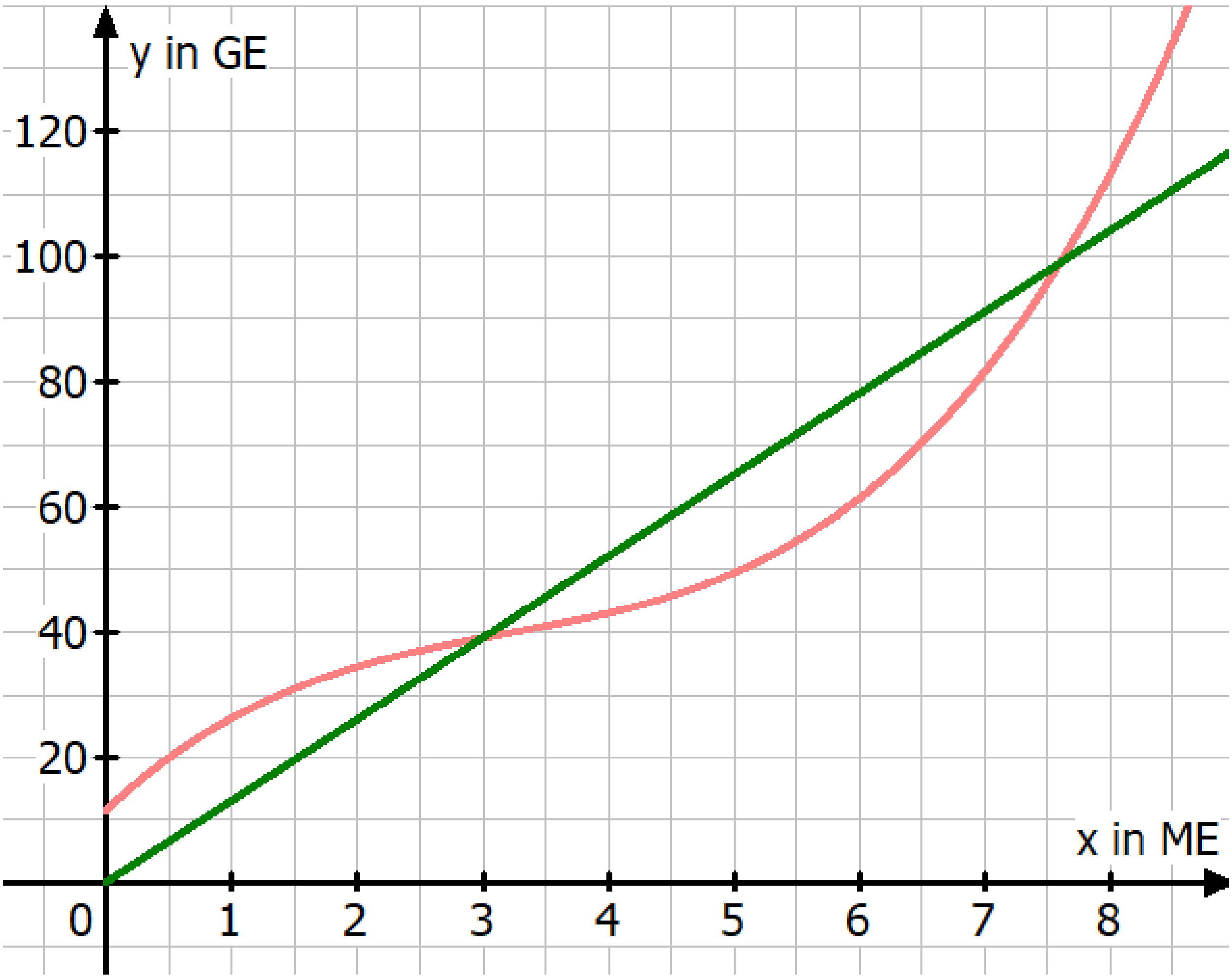
Die Produktionskosten lassen sich durch die folgende Kostenfunktion beschreiben:

$$y = K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}8x^2 + 19{,}1x + 11{,}4$$

Es gilt: y: Kosten in GE; x: Produktionsmenge in ME. GE: Geldeinheit; ME: Mengeneinheit

Hinweis: Berechnen Sie Mengen- und Geldeinheiten auf fünf Stellen genau (egal, ob vor oder nach dem Komma) und Prozentwerte auf zwei Nachkommastellen genau.

1. Bestimmen Sie die Erlösfunktion y = E(x). y: Erlös in GE



2. Bestimmen Sie die Gewinnfunktion y = G(x) y: Gewinn in GE

3. Stellen Sie die Gewinnfunktion graphisch dar.
x-Achse: von 0 bis 8 (8 cm lang) y-Achse von – 14 bis 18 (16 cm lang)

4. Die Gewinnschwelle liegt bei 3 ME. Berechnen Sie die Gewinngrenze.

5. Berechnen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn.

6. Um wie viel Prozent übersteigt der Erlös die Kosten bei einer Ausbringungsmenge von 4 ME? Wie viel Prozent sind die Kosten dann geringer als der Erlös?

7. Um wie viel Prozent ändern sich die Kosten, die Stückkosten, die fixen Stückkosten und die variablen Stückkosten, wenn die Produktion von 4 ME auf 5 ME erhöht wird?

8. Für eine Ausbringungsmenge von 6 ME betragen die Grenzkosten 15,5 GE / ME. Zeigen Sie, wie man dieses Ergebnis berechnet. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Berechnen Sie, wie viel die Produktion von 7 ME nach diesem Ergebnis kosten würde und wie hoch diese Kosten laut der Kostenfunktion sind.

9. Bestimmen Sie, bei welcher Ausbringungsmenge die Kostenfunktion am geringsten ansteigt. (Minimum der Grenzkostenfunktion). Bestimmen Sie diesen minimalen Anstieg.

10. Zur Vorhersage der Kosten verwenden wir ab einer Produktionsmenge von 6 ME ein anderes Modell. Wir gehen davon aus, dass ab dieser Produktionsmenge die Kosten gleichmäßig ansteigen werden. Der Graph dieser neuen Kostenfunktion ist eine Gerade, die den Graphen der bisherigen Kostenfunktion ohne Knick fortführt. Bestimmen Sie die Gleichung dieser neuen Kostenfunktion.

11. Bestimmen Sie die neue Gewinngrenze, wenn wir mit der neuen Kostenfunktion rechnen.

Die folgenden Aufgaben sind voneinander unabhängig und beziehen sich auf die bis $x = 6$ gültige Kostenfunktion $y = K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}8x^2 + 19{,}1x + 11{,}4$.

12. Der Preis wird so gesenkt, dass der Stückgewinn bei einer Ausbringungsmenge von 5 ME nur noch 1,5 GE/ME beträgt. Um wie viel Prozent wurde der Preis gesenkt?

13. Die Fixkosten sind so angestiegen, dass sich die Gewinnschwelle von 3 ME auf 4 ME verschiebt. Um wie viel Prozent sind die Fixkosten angestiegen?

14. Der Preis wird so gesenkt, dass sich die Gewinnschwelle von 3 ME auf 4 ME verschiebt. Um wie viel Prozent wurde der Preis gesenkt?

Ansgar Schiffler

Übungsaufgabe zu ökonomischen Funktionen

1. Bestimmen Sie die Erlösfunktion y = E(x). y: Erlös in GE

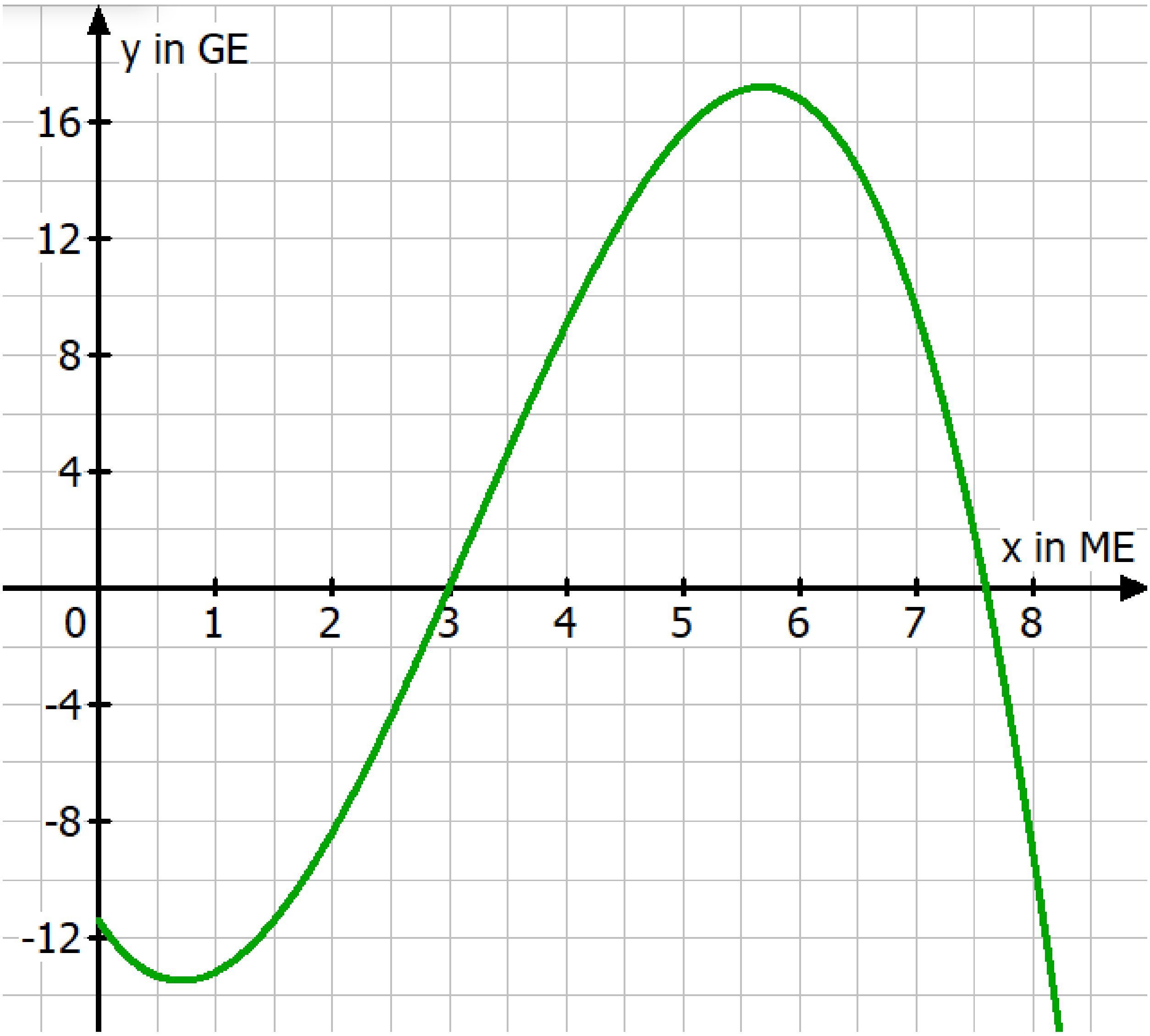
$E(x) = p \cdot x = 13x$

2. Bestimmen Sie die Gewinnfunktion y = G(x) y: Gewinn in GE

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - G(x) \\ &= 13x - (0{,}5x^3 - 4{,}8x^2 + 19{,}1x + 11{,}4) \\ &= 13x - 0{,}5x^3 + 4{,}8x^2 - 19{,}1x - 11{,}4 \\ &= -0{,}5x^3 + 4{,}8x^2 - 6{,}1x - 11{,}4 \end{aligned}$$

Lösung: $G(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}8x^2 - 6{,}1x - 11{,}4$

3. Stellen Sie die Gewinnfunktion graphisch dar.
x-Achse: von 0 bis 8 (8 cm lang) y-Achse von – 14 bis 18 (16 cm lang)



4. Die Gewinnschwelle liegt bei 3 ME. Berechnen Sie die Gewinngrenze.

Das Horner-Schema für x = 3

−0,5	**4,8**	**−6,1**	**−11,4**
−0,5	**3,3**	**3,8**	**0**

Ergebnis:

$-0{,}5x^3 + 4{,}8x^2 - 6{,}1x - 11{,}4 = (x - 3) \cdot (-0{,}5x^2 + 3{,}3x + 3{,}8)$

$-0{,}5x^2 + 3{,}3x + 3{,}8 = 0 \mid : (-0{,}5)$ $\quad x^2 - 6{,}6x - 7{,}6 = 0$

$$x_{1/2} = 3{,}3 \pm \sqrt{3{,}3^2 + 7{,}6} = 3{,}3 \pm \sqrt{18{,}49} = 3{,}3 \pm 4{,}3$$

$x_1 = 3{,}3 - 4{,}3 = -1 < 0$ **kommt als Lösung nicht in Frage**

$x_2 = 3{,}3 + 4{,}3 = 7{,}6$

Die Gewinngrenze liegt bei 7,6 ME.

5. Berechnen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn.

$G(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}8x^2 - 6{,}1x - 11{,}4$

$G'(x) = -1{,}5x^2 + 9{,}6x - 6{,}1x$ $\quad G''(x) = -3x + 9{,}6$

$G'(x) = 0$ $\quad -1{,}5x^2 + 9{,}6x - 6{,}1x = 0 \mid (-1{,}5)$

$$x^2 - 6{,}4 + 4{,}0\overline{6} = 0$$

$$x_{1/2} = 3{,}2 \pm \sqrt{3{,}2^2 - 4{,}0\overline{6}} = 3{,}2 \pm \sqrt{6{,}17\overline{3}} = 3{,}2 \pm 2{,}4846$$

$x_1 = 3{,}2 - 2{,}4846 = 0{,}7154 < 3$ **liegt nicht in Gewinnzone (3 ME bis 7,6 ME)**

$x_2 = 3{,}2 + 2{,}4846 = 5{,}6846$

$G''(5{,}6846) \approx -7{,}45 < 0$ also Maximum

$G(5{,}5846) = 17{,}186$

Der maximale Gewinn beträgt 17,186 GE und wird bei der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge von 5,6846 ME erzielt.

6. Um wie viel Prozent übersteigt der Erlös die Kosten bei einer Ausbringungsmenge von 4 ME? Wie viel Prozent sind die Kosten dann geringer als der Erlös?

E(4) = 13 · 4 = 52 K(4) = 43 $\frac{52}{43} \approx 1,2093$

Der Erlös übersteigt die Kosten um ca. 20,93 %.

$\frac{52}{43} \approx 0,8269$ 1 – 0,8269 = 0,1731

Der Kosten sind um ca. 17,31 % geringer als der Erlös.

Alternativer Rechenweg: 52 – 43 = 9 9/43 ≈ 0,2093 9 /52 ≈ 0,1731

7. Um wie viel Prozent ändern sich die Kosten, die Stückkosten, die fixen Stückkosten und die variablen Stückkosten, wenn die Produktion von 4 ME auf 5 ME erhöht wird?

K(4) = 43 K(5) = 49,4 49,4 / 43 ≈ 1,1488

Der Kosten steigen um ca. 14,88% an.

k(4) = K(4) / 4 = 43 / 4 = 10,75 k(5) = K(5) / 5 = 49,4 / 5 = 9,88

9,88 / 10,75 ≈ 0,9191 1 – 0,9191 = 0,0809

Die Stückkosten sinken um ca. 8,09%.

$k_f(4)$ = 11,4 / 4 = 2,85 $k_f(5)$ = 11,4 / 5 = 2,28

2,28 / 2,85 = 0,8 1 – 0,8 = 0,2 Die fixen Stückkosten sinken um 20%.

Es gibt mehrere Rechenwege
$k_v(4)$ = k(4) – $k_f(4)$ = 10,75 – 2,85 = 7,9
(K(4) – K_f) / 4 = (43 – 11,4) / 4 = 31,6 / 4 = 7,9

$k_v(5)$ = k(5) – $k_f(5)$ = 9,88 – 2,28 = 7,6
(K(5) – K_f) / 5 = (49,4 – 11,4) / 5 = 38 / 5 = 7,6

7,6 / 7,9 = 0,9620 1 – 0,9620 = 0,0380

Die variablen Stückkosten sinken um ca. 3,8%.

8. Für eine Ausbringungsmenge von 6 ME betragen die Grenzkosten 15,5 GE / ME. Zeigen Sie, wie man dieses Ergebnis berechnet. Interpretieren Sie dieses Ergebnis. Berechnen Sie, wie viel die Produktion von 7 ME nach diesem Ergebnis kosten würde und wie hoch diese Kosten laut der Kostenfunktion sind.

$K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}8x^2 + 19{,}1x + 11{,}4$

$K'(x) = 1{,}5x^2 - 9{,}6x + 19{,}1 \quad K'(6) = 15{,}5$

Die Grenzkosten betragen 15,5 GE /ME. Wenn bei einer Produktionsmenge von 6 ME die Produktion ausgeweitet wird, kostet dies 15,5 Geldeinheiten pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit. Dies gilt jedoch nur für geringe Steigerungen der Produktionsmenge. Die tatsächlichen Kosten werden etwas höher liegen, weil diese Kosten immer mehr zunehmen (dieser Punkt auf dem Graphen der Kostenfunktion liegt in einer Linkskurve, also einem Bereich zunehmender Steigung). Wir gehen hier davon aus, dass die Kosten gleichmäßig mit 15,5 GE / ME ansteigen werden.

$K(6) = 61{,}2 \qquad 7 - 6 = 1 \qquad 61{,}2 + 15{,}5 = 76{,}7 \qquad K(7) = 81{,}4$

Laut unserem Ergebnis für die Grenzkosten müssten die Produktion von 7 ME 76,7 GE kosten, laut Kostenfunktion müssten es 81,4 GE kosten.

9. Bestimmen Sie, bei welcher Ausbringungsmenge die Kostenfunktion am geringsten ansteigt. (Minimum der Grenzkostenfunktion). Bestimmen Sie diesen minimalen Anstieg.

$K''(x) = 3x - 9{,}6 \qquad K''(x) = 0 \qquad 3x - 9{,}6 = 0 \mid +9{,}6 \mid :3$

$x = 3{,}2 \qquad K'(3{,}2) = 3{,}74$

Bei einer Ausbringungsmenge von 3,2 ME sind die Grenzkosten am geringsten und betragen 3,74 GE / ME.

Hinweis: Bei x = 3,2 befindet sich der Wendepunkt der Kostenfunktion. Hier ist die Steigung der Kostenfunktion am geringste. Hier steigen die Kosten bei Ausweitung der Produktion am geringste an.

10. Zur Vorhersage der Kosten verwenden wir ab einer Produktionsmenge von 6 ME ein anderes Modell. Wir gehen davon aus, dass ab dieser Produktionsmenge die Kosten gleichmäßig ansteigen werden. Der Graph dieser neuen Kostenfunktion ist eine Gerade, die den Graphen der bisherigen Kostenfunktion ohne Knick fortführt. Bestimmen Sie die Gleichung dieser neuen Kostenfunktion.

$K(6) = 61{,}2 \quad K'(6)\ 15{,}5 \qquad K_{neu}(x) = 15{,}5 \cdot (x - 6) + 61{,}2$ Hinweis: gilt für $x > 6$

11. Bestimmen Sie die neue Gewinngrenze, wenn wir mit der neuen Kostenfunktion rechnen.

$K_{neu}(x) = 15{,}5 \cdot (x - 6) + 61{,}2 = 15{,}5x - 93 + 61{,}2 = 15{,}5x - 31{,}8$

$K(x) = E(x)$ Hinweis: An der Gewinngrenze beträgt der Gewinn 0 GE und der Erlös und die Kosten sind gleich hoch.

$15{,}5x - 31{,}8 = 13x \ \mid -13x + 31{,}8 \qquad 2{,}5x = 31{,}8 \ \mid : 2{,}5 \qquad x = 12{,}72$

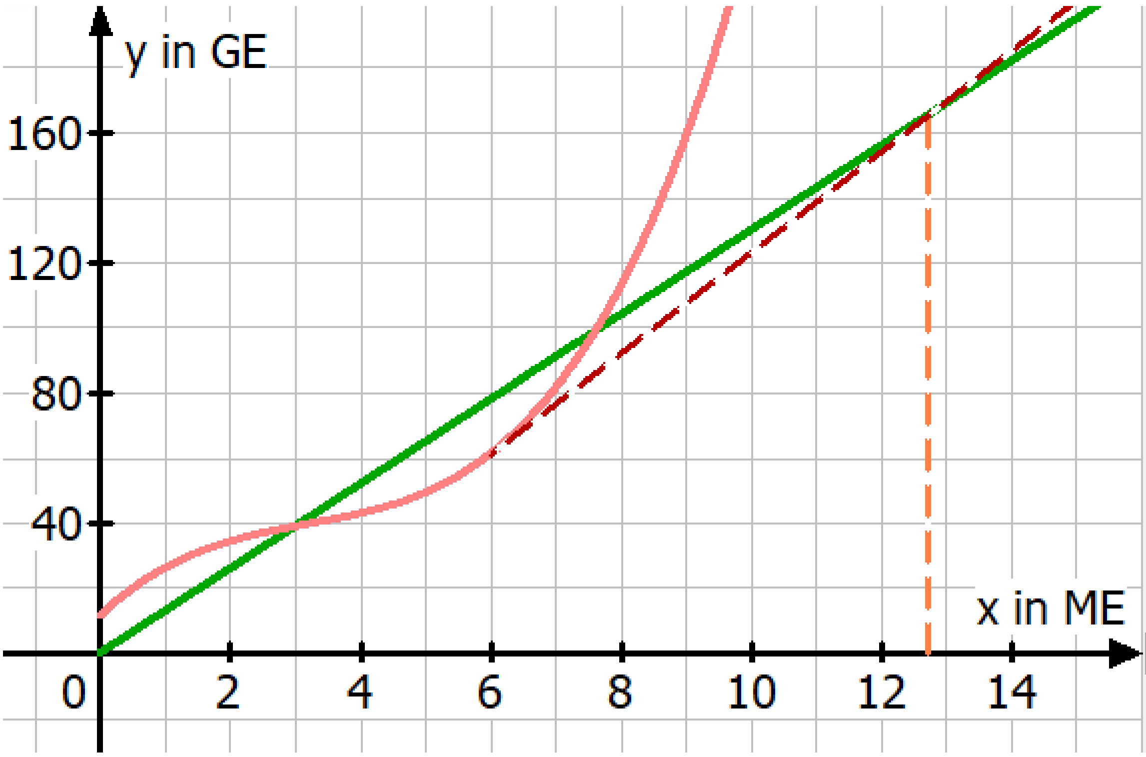
Die neue Gewinnschwelle liegt bei 12,72 ME.

Alternativer Rechenweg: $E(6) = 78 \quad K(6) = 61{,}2 \quad 78 - 61{,}2 = 16{,}8 \quad 15{,}5 - 13 = 2{,}5$

Bei einer Ausbringungsmenge von 6 ME ist der Erlös um 16,8 GE höher als die Kosten. Von da ab verringert sich der Gewinn pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit um 2,5 GE.

$16{,}8 / 2{,}5 = 6{,}72 \qquad 6 + 6{,}72 = 12{,}72$

In diesem Bild sehen Sie den Graphen der neuen Kostenfunktion sowie die neue Gewinngrenze.



Ansgar Schiffler

Übungsaufgabe zu ökonomischen Funktionen

Die folgenden Aufgaben sind voneinander unabhängig und beziehen sich auf die bis $x = 6$ gültige Kostenfunktion $y = K(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}8x^2 + 19{,}1x + 11{,}4$.

12. Der Preis wird so gesenkt, dass der Stückgewinn bei einer Ausbringungsmenge von 5 ME nur noch 1,5 GE/ME beträgt. Um wie viel Prozent wurde der Preis gesenkt?

Der bisherige Gewinn: $G(5) = 15{,}6$

Das können Sie auch so berechnen: $E(5) = 65$ $K(5) = 49{,}4$ $65 - 49{,}4 = 15{,}6$

Der neue Gewinn : $1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$

Der neue Erlös liegt also um 7,5 GE höher als die Kosten. $49{,}4 + 7{,}5 = 56{,}9$

$E_{alt}(5) = 65$ $E_{neu}(5) = 56{,}9$

$65 - 56{,}9 = 8{,}1$ $8{,}1 / 65 \cdot 100\% \approx 12{,}46\ \%$

Der Preis wurde um ca. 12,46 % gesenkt.

Hinweis: Der neue Preis beträgt 11,38 GE / ME. $56{,}9 / 5 = 11{,}38$

13. Die Fixkosten sind so angestiegen, dass sich die Gewinnschwelle von 3 ME auf 4 ME verschiebt. Um wie viel Prozent sind die Fixkosten angestiegen?

$G(4) = 9$

Das können Sie auch so berechnen: $E(4) = 52$ $K(4) = 43$ $52 - 43 = 9$

Der neue Gewinn beträgt 0 ME (an der Gewinnschwelle beträgt der Gewinn 0 ME) $G_{neu}(4) = 0$

Der Gewinn hat sich also um 9 GE verringert. Also sind die Fixkosten um 9 GE angestiegen.

$9 / 11{,}4 \cdot 100\ \% = 78{,}95\%$ Die Fixkosten sind um 78,95% angestiegen.

14. Der Preis wird so gesenkt, dass sich die Gewinnschwelle von 3 ME auf 4 ME verschiebt. Um wie viel Prozent wurde der Preis gesenkt?

$E_{alt}(4) = 52$ $K(4) = 43$ $E_{neu}(4) = 43$ (an der Gewinnschwelle sind Kosten und Erlös gleich)

$52 - 43 = 9$ $9 / 52 \cdot 100\% \approx 17{,}31\ \%$ Der Preis wurde um ca. 17,31 % gesenkt.

Hinweis: Der neue Preis beträgt 10,75 GE / ME. $43 / 4 = 10{,}75$