Ansgar Schiffler

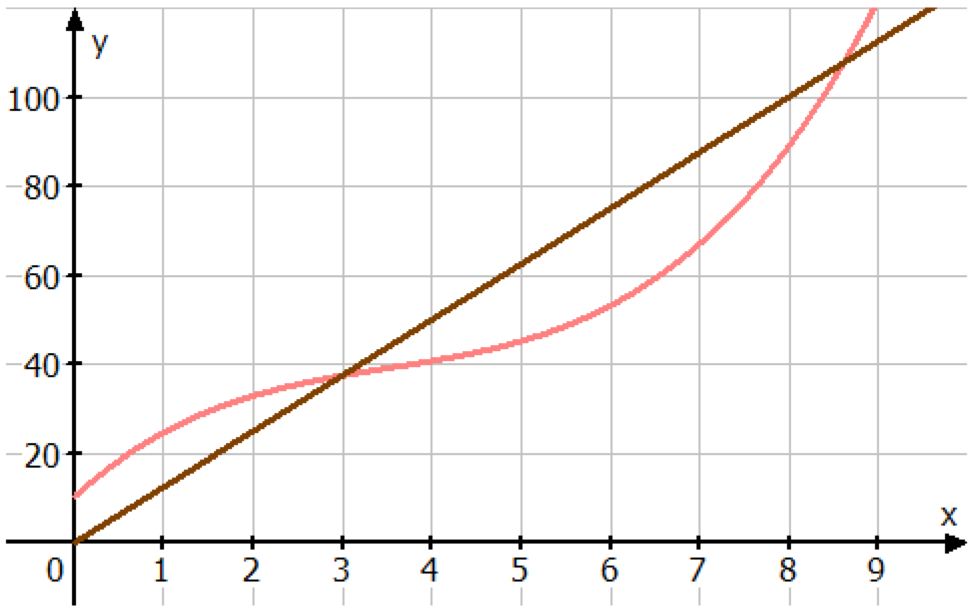
Untersuchung einer ökonomischen Funktion

Ein Unternehmen verkauft sein Produkt zum Preis von 12,5 GE / ME.

Die Produktionskosten lassen sich durch
die folgende Kostenfunktion beschreiben: $y = K(x) = 0{,}4x^3 - 4{,}24x^2 + 18{,}18x + 10{,}32$

Es gilt: y: Kosten in GE; x: Produktionsmenge in ME. GE: Geldeinheit ME: Mengeneinheit

a.) Bestimmen Sie die Erlösfunktion **$y = E(x)$**. y: Erlös in GE



b.) Bestimme die Gewinnfunktion $y = G(x)$ y: Gewinn in GE

c.) Stelle die Gewinnfunktion graphisch dar.
x-Achse: von 0 bis 9 (18 cm lang) y-Achse von – 15 bis 25 (20 cm lang)

d.) Die Gewinnschwelle liegt bei 3 ME. Berechne die Gewinngrenze.

e.) Berechne die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn.

f.) Bestimme für die Ausbringungsmenge 5 ME sowohl den Gewinn als auch den Stückgewinn.

g.) Um wie viel Prozent übersteigt der Erlös die Kosten bei einer Ausbringungsmenge von 7 ME? Wie viel Prozent des Erlöses entfallen dann auf den Gewinn?

h.) Der Preis des Produktes wird gesenkt. Die Gewinnschwelle verschiebt sich dadurch auf 4 ME. Bestimme den neuen Preis.

i.) Bei welcher Ausbringungsmenge sind die Grenzkosten am geringsten? Wie hoch sind diese?

Ansgar Schiffler

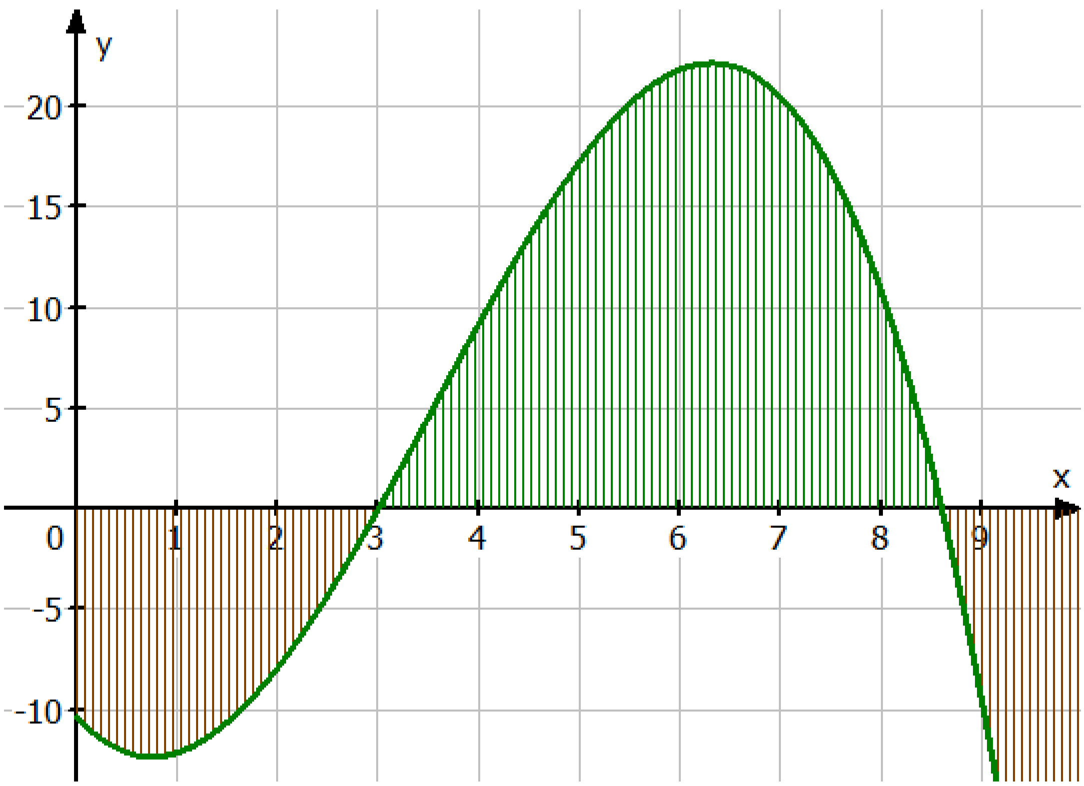
Untersuchung einer ökonomischen Funktion

a.) $E(x) = p \cdot x = 12{,}5 \cdot x$

b.) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 12{,}5x - (0{,}4x^3 - 4{,}24x^2 + 18{,}18x + 10{,}32) = -0{,}4x^3 + 4{,}24x^2 - 5{,}68x - 10{,}32$

c.) Der Graph der Gewinnfunktion. Der Gewinnbereich ist grün schraffiert, der Verlustbereich ist braun schraffiert.



d.) Eine Nullstelle bei x = 3 ist bekannt. Somit ist der Linearfaktor $x - 3$ in der Funktionsgleichung enthalten. Gesucht sind die anderen beiden Nullstellen.

$$(-0{,}4x^3 + 4{,}24x^2 - 5{,}68x - 10{,}32) : (x - 3) = -0{,}4x^2 + 3{,}04x + 3{,}44$$

Auf dieses Ergebnis kommst du entweder mit Hilfe der Polynomdivision oder mit dem Horner-Schema. Hier siehst du, wie das mit dem Horner-Schema funktioniert.
Die Regel lautet: mal links, plus oben (Beispiel: $-0{,}4 \cdot 3 + 4{,}24 = 3{,}04$)

x = 3

− 0,4	4,24	−5,68	−10,32
− 0,4	3,04	3,44	0

$$-0{,}4x^3 + 4{,}24x^2 - 5{,}68x - 10{,}32 = (x - 3) \cdot (-0{,}4x^2 + 3{,}04x + 3{,}44) = 0$$

$$-0{,}4x^2 + 3{,}04x + 3{,}44 = 0 \quad | : (-0{,}4)$$

$$x^2 - 7{,}6x - 8{,}6 = 0$$

Diese Gleichung kannst du u.a. mit dem Satz des Vieta oder mit der pq-Formel lösen:

Satz des Vieta: welche beiden Zahlen ergeben addiert − 7,6 und multipliziert − 8,6 ?
Es sind die beiden Zahlen 1 und − 8,6. Also ist $x^2 - 7{,}6x - 8{,}6 = (x + 1) \cdot (x - 8{,}6)$
$(x + 1) \cdot (x - 8{,}6) = 0 \quad x_1 = -1 \;;\; x_2 = 8{,}6$

pq-Formel : $x_{1/2} = 3{,}8 \pm \sqrt{3{,}8^2 + 8{,}6} = 3{,}8 \pm \sqrt{14{,}44 + 8{,}6} = 3{,}8 \pm \sqrt{23{,}04} = 3{,}8 \pm 4{,}8$

$x_1 = 3{,}8 - 4{,}8 = -1 \;;\; x_2 = 3{,}8 + 4{,}8 = 8{,}6$

Die Lösung $x_1 = -1$ beachten wir nicht, weil negative Produktionsmengen keinen Sinn ergeben. Also ist dies unsere Lösung: **Die Gewinngrenze liegt bei 8,6 ME**.

e.) Berechne die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn.

$G(x) = -0{,}4x^3 + 4{,}24x^2 - 5{,}68x - 10{,}32$

$G'(x) = -1{,}2x^2 + 8{,}48x - 5{,}68$ $\quad$ $G''(x) = -2{,}4x + 8{,}48$

$-1{,}2x^2 + 8{,}48x - 5{,}68 = 0 \quad | : (-1{,}2)$

$$x^2 - 7{,}0\overline{6}x + 4{,}7\overline{3} = 0$$

$$x_{1/2} = 3{,}5\overline{3} \pm \sqrt{3{,}5\overline{3}^2 - 4{,}7\overline{3}} = 3{,}5\overline{3} \pm \sqrt{7{,}75\overline{1}} = 3{,}5\overline{3} \pm 2{,}78408$$

$$x_1 = 3{,}5\overline{3} - 2{,}78408 \approx 0{,}749 \qquad x_2 = 3{,}5\overline{3} + 2{,}78408 \approx 6{,}3174$$

Die Zahl 0,749 kommt als Lösung natürlich nicht in Frage, denn die gewinnmaximale Ausbringungsmenge muss ja zwischen der Gewinnschwelle und der Gewinngrenze liegen, also zwischen 3 und 8,6.

$G''(6{,}3174) = -6{,}682 < 0$ Dies bestätigt uns, dass an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge beträgt ca. 6,3174 ME.

$G(6{,}3174) \approx 22{,}1638$

Der maximale Gewinn beträgt ca. 22,16 GE.

f.) Bestimme für die Ausbringungsmenge 5 ME sowohl den Gewinn als auch den Stückgewinn.

G(5) = 17,28 17,28 / 5 = 3,456

Bei einer Ausbringungsmenge von 5 ME beträgt der Gewinn 17,28 GE.
Der Gewinn pro ME beträgt dann 3,456 ME / GE.

g.) Um wie viel Prozent übersteigt der Erlös die Kosten bei einer Ausbringungsmenge von 7 ME? Wie viel Prozent des Erlöses entfallen dann auf den Gewinn?

Zur Erinnerung: $E(x) = 12{,}5 \cdot x$; $y = K(x) = 0{,}4x^3 - 4{,}24x^2 + 18{,}18x + 10{,}32$

E(7) = 87,5 K(7) = 67,02 G(7) = E(7) – K(7) = 87,5 – 67,02 = 20,48

$$\frac{20{,}48}{67{,}02} \cdot 100\% \approx 30{,}56\%$$

Bei einer Ausbringungsmenge von 7 ME übersteigt der Erlös die Kosten um ca. 30,56%.

$$\frac{20{,}48}{87{,}5} \cdot 100\% \approx 23{,}4\%$$

Bei einer Ausbringungsmenge von 7 ME entfallen ca. 23,4% des Erlöses auf den Gewinn.

h.) Der Preis des Produktes wird gesenkt. Die Gewinnschwelle verschiebt sich dadurch auf 4 ME. Bestimme den neuen Preis.

Bei der Gewinnschwelle beträgt der Gewinn 0 GE. Der Erlös und die Kosten sind dann gleich hoch. K(4) = 40,8. Der Erlös beträgt 40,8 GE für 4 ME. Also beträgt der Erlös pro Mengeneinheit 40,8 GE / 4 ME = 10,2 GE / ME. **Der neue Preis beträgt 10,2 GE/ME**

i.) Bei welcher Ausbringungsmenge sind die Grenzkosten am geringsten? Wie hoch sind diese? $K'(x) = 1{,}2x^2 - 8{,}48x + 18{,}18$ $K''(x) = 2{,}4x - 8{,}48$ $2{,}4x - 8{,}48 = 0 \mid +8{,}48 \mid :2{,}4$

$x \approx 3{,}533$ $K'(3{,}533) \approx 3{,}2$ **Bei einer Ausbringungsmenge von ca. 3,533 ME sind die Grenzkosten am geringsten und betragen ca. 3,2 GE/ME.** Jede zusätzlich produzierte Mengeneinheit kostet dann nur ca. 3,2 Geldeinheiten.