Ansgar Schiffler, BBS Bingen

2. Übungsaufgabe zur Untersuchung ökonomischer Funktionen

Ein Unternehmen kann sein Produkt zum Preis von 12 GE / ME verkaufen.

Die Produktionskosten lassen sich durch die folgende Kostenfunktion beschreiben:

$$y = K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x + 20{,}4$$

Es gilt: y: Kosten in GE; x: Produktionsmenge in ME. GE: Geldeinheit; ME: Mengeneinheit

a.) Bestimmen Sie die Erlösfunktion y = E(x). y: Erlös in GE

b.) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion y = G(x) y: Gewinn in GE

c.) Stellen Sie Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion von x = 0 bis x = 9 in unterschiedlichen Farben graphisch dar.

d.) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze

e.) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn

f.) Erläutern Sie den Verlauf der Gewinnfunktion.

g.) Bei welcher Ausbringungsmenge sind die Grenzkosten am geringsten? Wie hoch sind diese?

h.) Bestimmen Sie das Betriebsminimum und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Ansgar Schiffler, BBS Bingen

Musterlösung zur 2. Übungsaufgabe ´ökonomische Funktionen´

a.) Bestimmen Sie die Erlösfunktion y = E(x). y: Erlös in GE

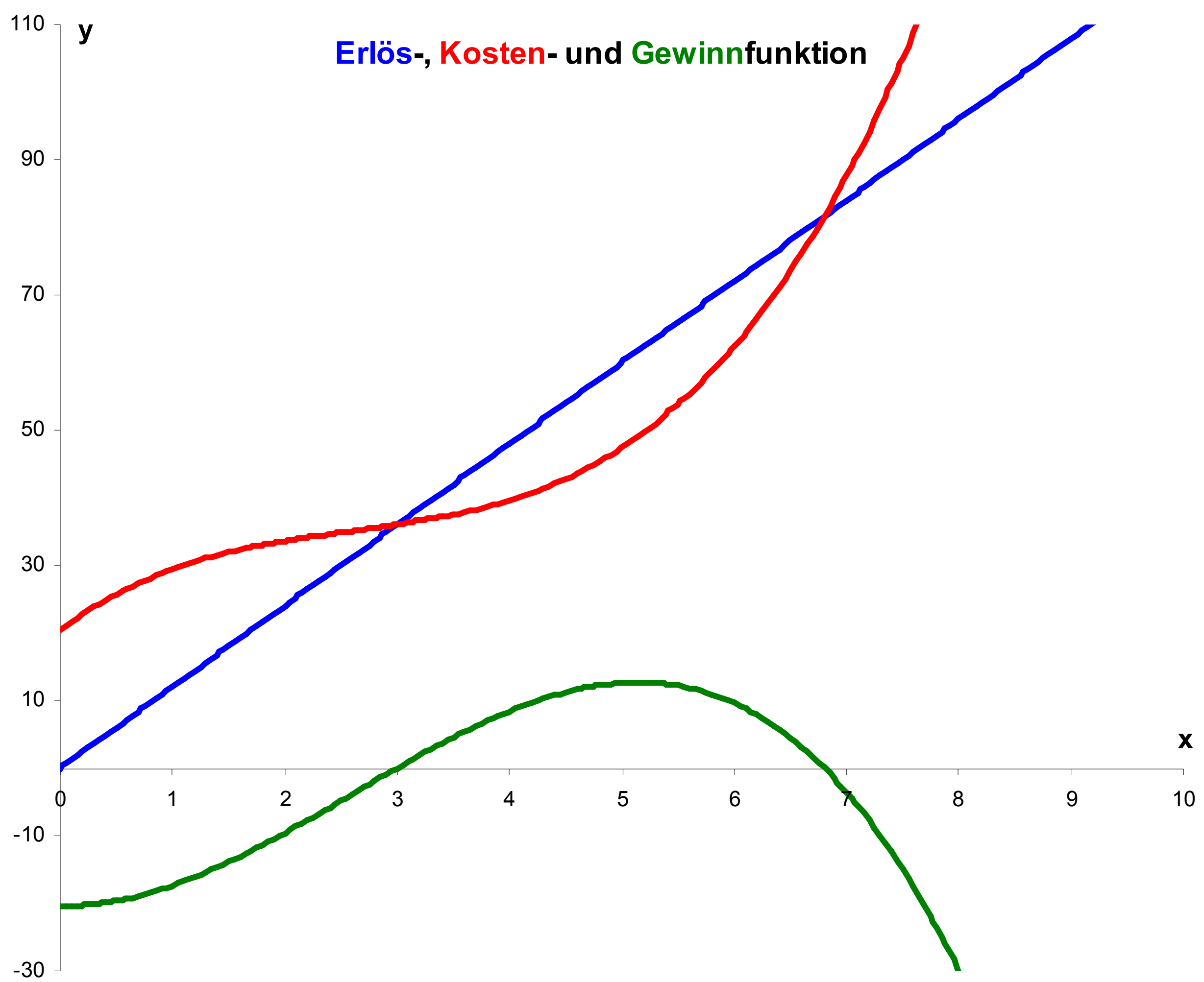
$E(x) = p \cdot x = 12x$

b.) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion y = G(x) y: Gewinn in GE

$G(x) = E(x) - K(x) = 12x - (0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x + 20{,}4) = -0{,}5x^3 + 3{,}9x^2 - 0{,}4x - 20{,}4$

c.) Stellen Sie Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion von x = 0 bis x = 9 in unterschiedlichen Farben graphisch dar.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E(x)	0	12	24	36	48	60	72	84	96	108
K(x)	20,4	29,4	33,6	36	39,6	47,4	62,4	87,6	126	180,6
G(x)	-20,4	-17,4	-9,6	0	8,4	12,6	9,6	-3,6	-30	-72,6



d.) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze

Die Gewinnschwelle ist die erste Nullstelle der Gewinnfunktion im positiven Bereich.
Die Gewinngrenze ist die zweite Nullstelle im positiven Bereich.

Die erste Nullstelle erhalten wir bereits aus der Wertetabelle.

$x_{GS} = 3$. Ab einer Produktionsmenge von 3 ME wird ein Gewinn erzielt.

Die zweite Nullstelle erhalten wir zum Beispiel mit Hilfe des Horner-Schemas.

Für $x_1 = 3$ und $G(x) = -0{,}5x^3 + 3{,}9x^2 - 0{,}4x - 20{,}4$

–0,5	3,9	–0,4	– 20,4
–0,5	2,4	6,8	0

Ergebnis: $G(x) = -0{,}5x^3 + 3{,}9x^2 - 0{,}4x - 20{,}4 = (x-3) \cdot (-0{,}5x^2 + 2{,}4x + 6{,}8)$

Hinweis: Das gleiche Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie eine Polynomdivision durchführen.

Ein Produkt ist dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Wir untersuchen den zweiten Faktor.

$G(x) = (x-3) \cdot (-0{,}5x^2 + 2{,}4x + 6{,}8) = 0$

$-0{,}5x^2 + 2{,}4x + 6{,}8 = 0 \quad | :(-0{,}5)$

$x^2 - 4{,}8x - 13{,}6 = 0$

$$x_{2/3} = 2{,}4 \pm \sqrt{2{,}4^2 + 13{,}6} = 2{,}4 \pm \sqrt{19{,}36} = 2{,}4 \pm 4{,}4$$

$x_2 = 2{,}4 + 4{,}4 = 6{,}8$

$x_3 = 2{,}4 - 4{,}4 = -2$

Hinweis: x_3 kommt als Lösung nicht in Frage, da $x_3 < 0$. Er gibt keine negativen Produktionsmengen.

$x_{GG} = 6{,}8$ Ab einer Produktionsmenge von 6,8 ME wird kein Gewinn mehr erzielt.

Die Gewinnschwelle beträgt 3 ME und die Gewinngrenze beträgt 6,8 ME. Nur wenn die Produktionsmenge zwischen diesen beiden Werten liegt, wird ein Gewinn erzielt.

e.) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn

Es ist das Maximum der Gewinnfunktion gesucht. Die Gewinnfunktion ist eine Funktion dritten Grades mit zwei Extremstellen: einem Maximum und einem Minimum.

Erklärung:
Wir müssen die erste und die zweite Ableitungsfunktion ermitteln. Extrema finden Sie, indem Sie die erste Ableitung null setzen und nach x auflösen. Die erste Ableitung gibt und die Steigung des Funktionsgraphen an und in einem Maximum bzw. Minimum ist die Steigung null. Dann setzen wir den Wert, den wir für x erhalten haben, in die zweite Ableitungsfunktion ein. Die zweite Ableitungsfunktion gibt uns das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen an. Wenn die zweite Ableitungsfunktion negativ ist, nimmt die Steigung ab (Rechtskurve). Ein Maximum liegt immer in einer Rechtskurve.

$G(x) = -0{,}5x^3 + 3{,}9x^2 - 0{,}4x - 20{,}4$ $\quad$ $G'(x) = -1{,}5x^2 + 7{,}8x - 0{,}4$ $\quad$ $G''(x) = -3x + 7{,}8$

$G'(x) = 0$ $\qquad$ $-1{,}5x^2 + 7{,}8x - 0{,}4 = 0 \mid : (-1{,}5)$

$x^2 - 5{,}2x + 0{,}2\overline{6} = 0$ $\qquad$ $x_{1/2} = 2{,}6 \pm \sqrt{2{,}6^2 - 0{,}2\overline{6}} = 2{,}6 \pm \sqrt{6{,}49\overline{3}} = 2{,}6 \pm 2{,}5482$

$x_1 = 2{,}6 + 2{,}5482 = 5{,}1482$ $\qquad$ $x_2 = 2{,}6 - 2{,}5482 = 0{,}0518$

Hinweis: x_2 kommt als Lösung nicht in Frage, da x_2 nicht zwischen der Gewinnschwelle $x_{GS} = 3$ und der Gewinngrenze $x_{GG} = 6{,}8$ liegt.

Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge beträgt ca. 5,1482 ME.

Der maximale Gewinn wird bestimmt, indem wir x = 5,1482 in die Gewinnfunktion einsetzen und somit den zugehörigen y-Wert (den Gewinn) bestimmen.

$G(5{,}1482) = -0{,}5 \cdot 5{,}1482^3 + 3{,}9 \cdot 5{,}1482^2 - 0{,}4 \cdot 5{,}1482 - 20{,}4 \approx 12{,}6823$

Der maximale Gewinn beträgt ca. 12,6823 GE. Er wird bei einer Ausbringungsmenge von ca. 5,1482 ME erzielt.

Zusatzinformation: Der Stückgewinn beträgt dann 12,6823 GE / 5,1482 ME $\approx$ 2,4634 GE / ME
Der Stückerlös beträgt ja 12 GE / ME.
Die Stückkosten betragen dann 12 GE / ME – 2,4634 GE / ME $\approx$ 9,5366 GE / ME.
(Diese Angaben gelten nur für die gewinnmaximale Ausbringungsmenge)

f.) Erläutern Sie den Verlauf der Gewinnfunktion.

Bis zur Gewinnschwelle $x_{GS} = 3$ übersteigen die Kosten die Einnahmen, ab der Gewinnschwelle wird ein Gewinn erzielt, der zunächst mit steigender Produktion anwächst und bei ca. 5,1482 ME sein Maximum von ca. 12,6823 GE erreicht. Ab diesem Punkt wachsen die Kosten bei einer Ausweitung der Produktion stärker an als der Erlös und somit sinkt der Gewinn. Ab der Gewinngrenze $x_{GG} = 6,8$ überschreiten die Kosten wieder den Erlös (die Einnahmen) und es wird Verlust gemacht.

g.) Bei welcher Ausbringungsmenge sind die Grenzkosten am geringsten? Wie hoch sind diese?

Erklärung:
Die Grenzkosten K '(x) geben die Steigung der Kostenfunktion an. Die Grenzkosten geben also die Zusatzkosten bei Ausweitung der Produktionsmenge an. Die Einheit ist GE / ME. Wenn die Grenzkosten zum Beispiel 8 GE / ME betragen, bedeutet dies, dass die Ausweitung der Produktion 8 Geldeinheiten pro Mengeneinheit kostet.

$K(x) = 0,5x^3 - 3,9x^2 + 12,4x + 20,4$

$K'(x) = 1,5x^2 - 7,8x + 12,4$ $\qquad$ $K''(x) = 3x - 7,8$ $\qquad$ $K'''(x) = 3$

Erklärung:
Um das Minimum der Grenzkostenfunktion K '(x) zu bestimmen, müssen wir diese Ableiten, null setzen und diese Gleichung nach x auflösen. Die 1. Ableitung der Grenzkostenfunktion K '(x) ist zugleich die zweite Ableitung der Kostenfunktion K(x). Wir suchen also den Wendepunkt der Kostenfunktion. Es ist ein Wendepunkt mit minimaler Steigung, also ein Übergang von Rechts- in Linkskurve. An der Stelle, an der die Steigung der Kostenfunktion am geringsten ist, ist eine Ausweitung der Produktionsmenge am günstigsten.

$K''(x) = 0$ $\qquad$ $3x - 7,8 = 0 \;\; | + 7,8 \;\; | :3$ $\qquad$ $x = 2,6$

$K'''(2,6) = 3 > 0 \;\Rightarrow$ Minimum der Grenzkostenfunktion
(2. Ableitung der Grenzkostenfunktion positiv);
Wendepunkt der Kostenfunktion
(3. Ableitung der Kostenfunktion positiv; Wendepunkt mit minimaler Steigung; Übergang von Rechts- in Linkskurve)

$K'(2,6) = 1,5 \cdot 2,6^2 - 7,8 \cdot 2,6 + 12,4 = 2,26$

Das Minimum der Grenzkostenfunktion tritt bei einer Ausbringungsmenge von 2,6 ME auf und beträgt 2,26 GE / ME.

Hinweis:
Bis zu diesem Punkt sind die Grenzkosten fallend (der Anstieg der Kosten nimmt ab; degressiv) und ab diesem Punkt sind die Grenzkosten steigend (der Anstieg der Kosten nimmt zu; progressiv)

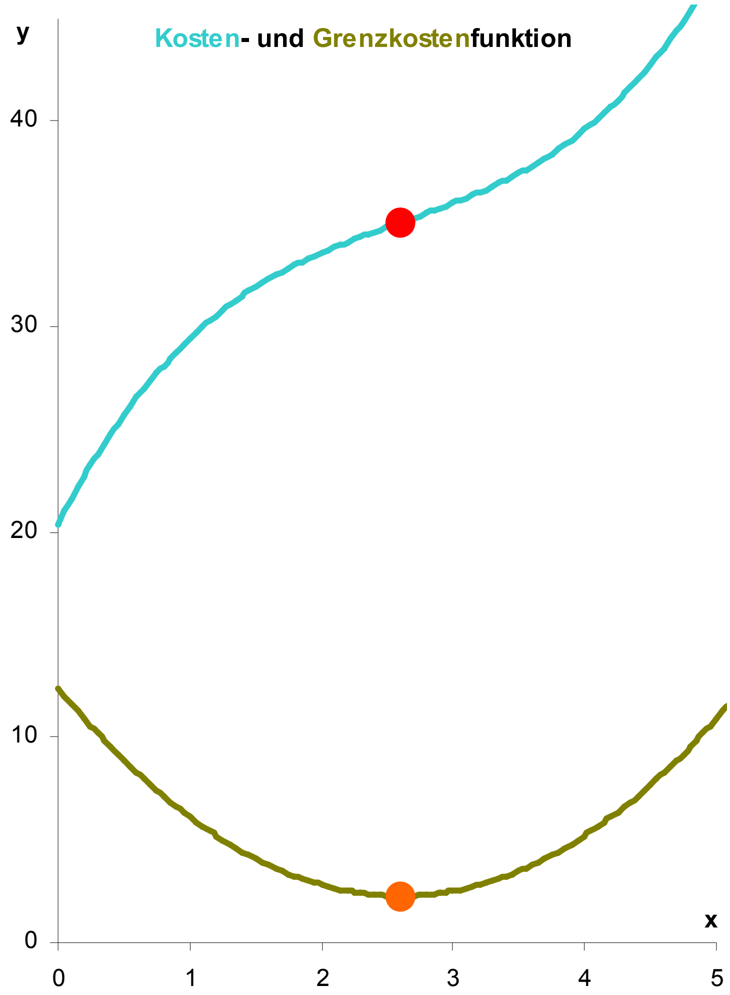
Zusatzinformation zum Minimum der Grenzkostenfunktion

In nebenstehendem Diagramm ist gut zu erkennen, dass das Minimum der Grenzkostenfuktion dem Wendepunkt der Kostenfunktion entspricht.
An der Stelle, an der die Grenzkosten am geringsten sind (hier x = 2,6), weist die Kostenfunktion die geringste Steigung auf.

Die Kosten steigen bei Ausweitung der Produktion immer an, die Grenzkosten sind also immer positiv.

Bis zum Minimum der Grenzkostenfunktion (hier x = 2,6) ist der Anstieg der Kosten degressiv (der Anstieg nimmt ab; er ist zwar positiv, aber abnehmend). Ab dem Minimum der Grenzkostenfunktion ist der Anstieg der Kosten progressiv (der Anstieg nimmt zu; die Kurve wird sozusagen steiler).

Der **Wendepunkt** der **Kostenfunktion** ist **Rot** markiert, das **Minimum** der **Grenzkostenfunktion** ist **Orange** markiert.



h.) Bestimmen Sie das Betriebsminimum und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Erklärung:

Die Kosten setzen sich aus **Fixkosten** (Kosten, die auch dann entstehen, wenn nichts produziert wird, also zum Beispiel Unterhalt von Gebäuden, Lohn für vorübergehend beschäftigungslose Mitarbeiter) und **variablen Kosten** (Kosten, die hinzukommen, wenn produziert wird) zusammen.

Es gilt also: $K(x) = K_v(x) + K_f$

Die Fixkosten sind also immer der Teil der Kostenfunktion K(x) der nicht von x abhängt: der konstante Summand.

In unserem Beispiel: $K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x + 20{,}4$

$K_v(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x$ $\qquad K_f(x) = 20{,}4$

Erklärung:

Die variablen Stückkosten sind die variablen Kosten pro Stück.
Beispiel: Betragen die variablen Kosten 8 GE bei einer Produktionsmenge von 4 ME (4 Stück), so betragen die variablen Kosten 2 GE pro Mengeneinheit (pro Stück).

Man spricht von Stückkosten, obwohl die Produktionsmenge allgemein in Mengeneinheiten (ME) angegeben wird. Eine Mengeneinheit kann ein Stück sein. Eine Mengeneinheit könnte aber auch 100 Stück entsprechen oder einem kg oder einem Liter etc.

Es gilt: $k_v(x) = \dfrac{K_v(x)}{x}$

Die Stückkosten werden mit dem Kleinbuchstaben k bezeichnet und die Kosten mit dem Großbuchstaben k. Analog zu den variablen Stückkosten gibt es auch die fixen Stückkosten.
Fixe Stückkosten: $k_f(x) = K_f / x$

Das Minimum der variablen Stückkostenfunktion wird als **Betriebsminimum** bezeichnet.
Das Betriebsminimum gibt die niedrigst möglichen Kosten pro Stück an, wenn man die Fixkosten außer Acht läßt. Das Betriebsminimum stellt für das Unternehmen die kurzfristige Preisuntergrenze dar.
Die Stückkosten sind die Kosten pro Stück. Die Stückkosten setzen sich aus den variablen Stückkosten und den fixen Stückkosten zusammen: $k(x) = k_v(x) + k_f(x)$. Das Minimum der Stückkostenfunktion wird als **Betriebsoptimum** bezeichnet. Das Betriebsoptimum gibt die niedrigst möglichen Kosten pro Stück an. Hierbei werden alle Kosten berücksichtigt, also die variablen und die fixen Kosten. Das Betriebsoptimum stellt für das Unternehmen die langfristige Preisuntergrenze dar.

$K_v(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x$

$k_v(x) = K_v(x) / x = 0{,}5x^2 - 3{,}9x + 12{,}4$

$k_v'(x) = x - 3{,}9$ $\quad$ $k_v'(x) = 0$ $\quad$ $x - 3{,}9 = 0 \mid + 3{,}9$ $\quad$ $x = 3{,}9$

$k_v''(x) = 1 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$k_v(3{,}9) = 0{,}5 \cdot 3{,}9^2 - 3{,}9 \cdot 3{,}9 + 12{,}4 = 4{,}795$

Das Betriebsminimum wird bei einer Produktionsmenge von 3,9 ME erreicht und beträgt 4,795 GE / ME. Wenn ein Erlös von 4,795 GE / ME erzielt wird, reicht dies gerade so zur Deckung der variablen Kosten. Die fixen Kosten sind nicht gedeckt. Dieser Preis stellt die kurzfristige Preis-untergrenze dar.

Zusatzinformationen zu Stückkosten

Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich durch folgende Kostenfunktion beschreiben:

$$y = K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x + 20{,}4$$

Es gilt: y: Kosten in GE; x: Produktionsmenge in ME. GE: Geldeinheit; ME: Mengeneinheit

Die Kosten lassen sich in Fixkosten K_f und in variable Kosten K_v unterteilen. Die Fixkosten sind die Kosten, die auch dann anfallen, wenn nichts produziert wird, wie z.B. Gehälter für Mitarbeiter, Unterhaltskosten für Gebäude etc. In diesem Beispiel gilt: $K_f = 20{,}4$ $K_v(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x$

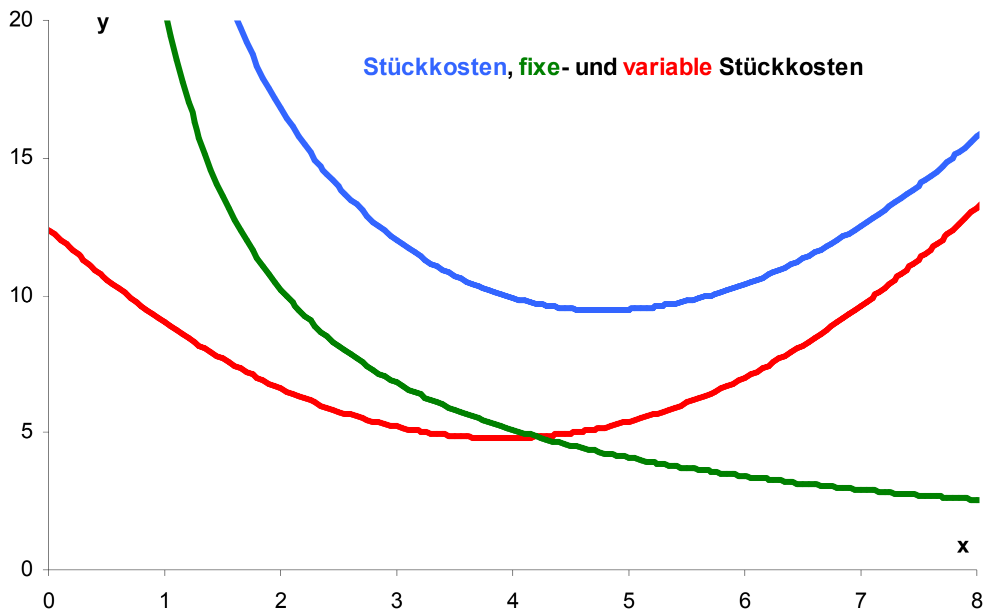
Die Stückkosten sind die Kosten pro produzierter Mengeneinheit. Eine Mengeneinheit kann ein Stück sein, es können tausend Stück sein oder ein Hektoliter oder eine Tonne etc.

Wenn zum Beispiel 5 ME produziert werden, dann betragen die Fixkosten $K_f = 20{,}4$ und die variablen Kosten $K_v(5) = 27{,}0$. Die fixen Stückkosten betragen dann $k_f = 20{,}4 / 5 = 4{,}08$ und die variablen Stückkosten betragen $k_v = 27{,}0 / 5 = 5{,}40$.
Die Stückkosten werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet und die Einheit ist GE / ME.

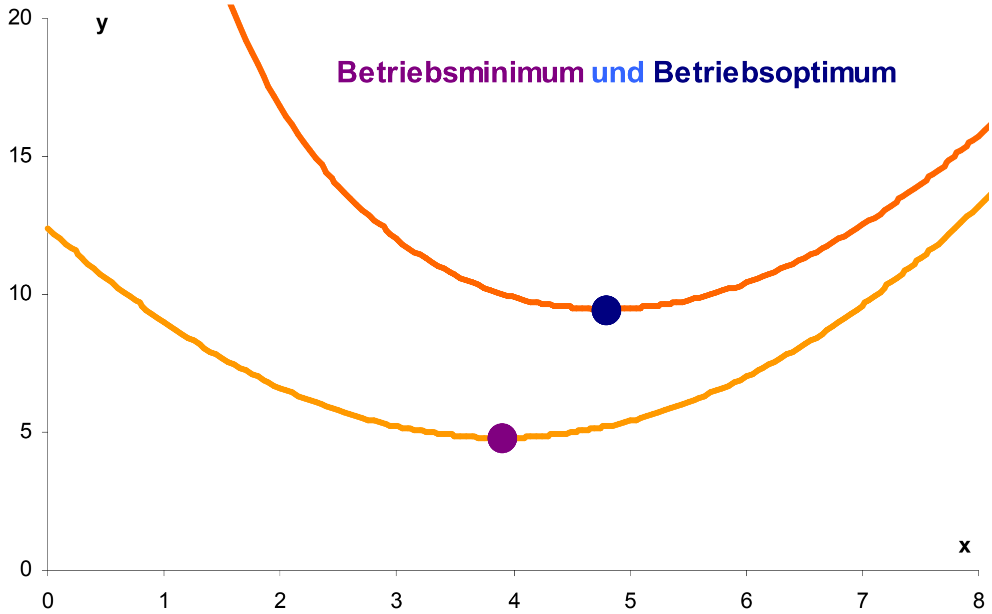
Es gilt: $k_f(x) = K_f / x = 20{,}4 / x$ und $k_v(x) = K_v / x = 0{,}5x^2 - 3{,}9x + 12{,}4$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K(x)	20,4	29,4	33,6	36	39,6	47,4	62,4	87,6	126
K_f	20,4	20,4	20,4	20,4	20,4	20,4	20,4	20,4	20,4
Kv(x)	0	9	13,2	15,6	19,2	27	42	67,2	105,6
k(x)	n.f.	29,40	16,80	12,00	9,90	9,48	10,40	12,51	15,75
$k_f(x)$	n.f.	20,40	10,20	6,80	5,10	4,08	3,40	2,91	2,55
kv(x)	n.f.	9,00	6,60	5,20	4,80	5,40	7,00	9,60	13,20

Die fixen Stückkosten sinken mit steigender Produktion. Je mehr produziert wird, desto weniger fallen die Fixkosten in's Gewicht. Die variablen Stückkosten können mit Ausweitung der Produktionsmenge sowohl fallen als auch steigen. Die Stückkosten sind hier graphisch dargestellt.



Betriebsminimum und Betriebsoptimum



Variable Stückkosten und Stückkosten

Das **Betriebsminimum** ist das Minimum / Tiefpunkt der Parabel, die die variablen Stückkosten darstellt. Dieses Minimum kann sehr einfach mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt werden:

$K_v(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12{,}4x$ $\qquad k_v(x) = K_v(x) / x = 0{,}5x^2 - 3{,}9x + 12{,}4$

$k_v'(x) = x - 3{,}9$ $\qquad k_v'(x) = 0$ $\qquad x - 3{,}9 = 0 \mid + 3{,}9$ $\qquad x = 3{,}9$

$k_v''(x) = 1 > 0 \Rightarrow$ Minimum $\qquad k_v(3{,}9) = 0{,}5 \cdot 3{,}9^2 - 3{,}9 \cdot 3{,}9 + 12{,}4 = 4{,}795$

Das **Betriebsminimum** wird bei einer Produktionsmenge von 3,9 ME erreicht und beträgt 4,795 GE / ME. Wenn ein Stückerlös (Einnahmen pro Mengeneinheit) von 4,795 GE / ME erzielt wird, reicht dies gerade so zur Deckung der variablen Kosten. Die fixen Kosten sind nicht gedeckt. Dieser Preis stellt die **kurzfristige Preisuntergrenze** dar.

Das **Betriebsoptimum** ist das Minimum / Tiefpunkt des Graphens, der die Stückkosten darstellt. Die Stückkosten unterscheiden sich von den variablen Stückkosten dadurch, dass hier auch die Fixkosten berücksichtigt werden. Daher sind die Stückkosten stets höher als die variablen Stückkosten. Dieser Unterschied wird jedoch immer geringer, je höher die Produktionsmenge ist, da dann die Fixkosten immer weniger in's Gewicht fallen. Sie sehen dies auch anhand der beiden Graphen: links ist der Abstand noch groß und je weiter Sie nach rechts gehen (größere Produktionsmenge) desto kleiner wird der Abstand zwischen den Stückkosten und den variablen Stückkosten.
Das Betriebsoptimum läßt sich nicht so einfach bestimmen wie das Betriebsminimum. Hierzu muss ein Näherungsverfahren angewendet werden, wie z.B. das Newton'sche Approximationsverfahren.

Das **Betriebsoptimum** wird bei einer Produktionsmenge von 4,7894 ME erreicht und beträgt 9,45 GE / ME. Wenn ein Stückerlös (Einnahmen pro Mengeneinheit) von 9,45 GE / ME erzielt wird, reicht dies gerade so zur Deckung der Kosten. Dieser Preis stellt die **langfristige Preisuntergrenze** dar. Achtung! Dies ist nicht optimal für das Unternehmen, da es weder Gewinn- noch Verlust macht.