

2. Übungsaufgabe zu Exponentialfunktionen

Die folgende Funktion $y = f(t) = 9 \cdot e^{-0,4t} - 9 \cdot e^{-5t}$

stellt die Konzentration eines Stoffes in einer Flüssigkeit dar.

y ist die Konzentration des Stoffes in mg / Liter. t ist die Zeit in h.

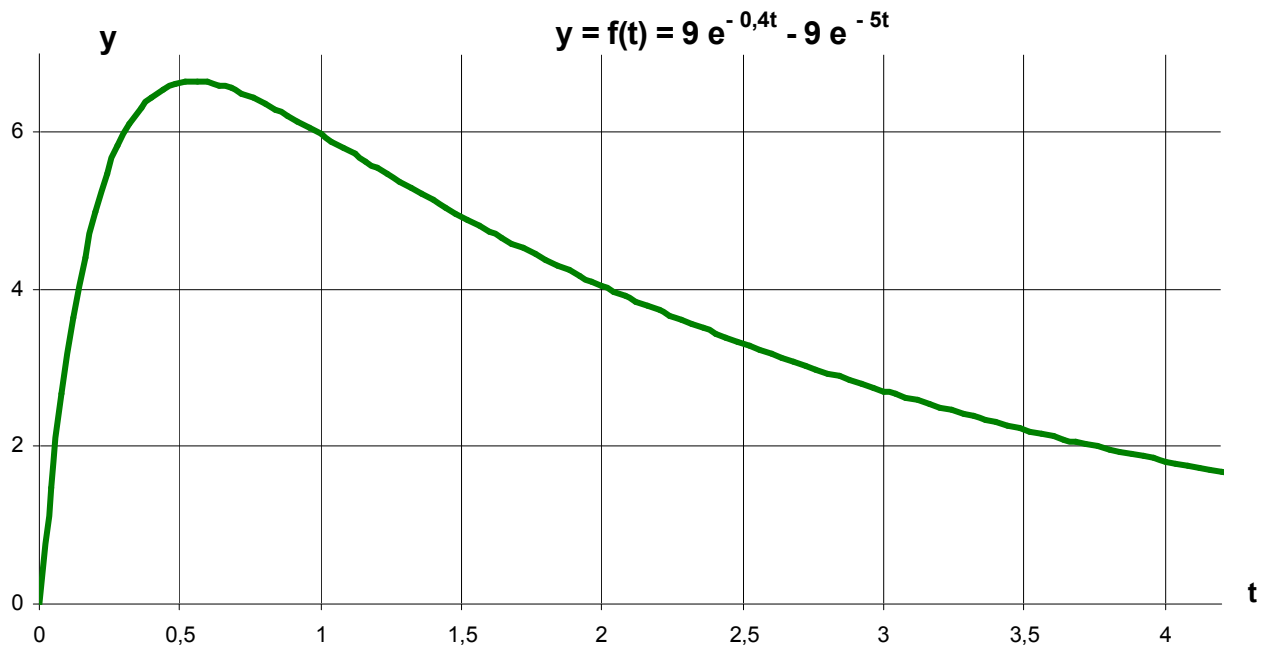
Sobald der Stoff in die Flüssigkeit gelangt, löst er sich auf und die Konzentration steigt stark an. Dann wird der Stoff langsam wieder abgebaut und sein Konzentration sinkt wieder.

- a.) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die folgenden Zeitpunkte (in h):
0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,8 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4
- b.) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von t = 0 bis t = 4 und von y = 0 bis y = 7
- c.) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Stoffes am größten ist und bestimmen Sie diese maximale Konzentration.
- d.) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Stoffes am stärksten abnimmt. Wie stark nimmt die Konzentration dann ab?
- e.) Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration soll ab dem Zeitpunkt t = 3 durch eine lineare Funktion g beschrieben werden, die Graphen der Funktion f ohne „Knick“ fortführt. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion g und den Zeitpunkt, ab dem der Stoff in der Flüssigkeit vollständig abgebaut ist.
- f.) Bestimmen Sie die mittlere Konzentration des Stoffes zwischen 30 Minuten und 1 h 15 Minuten nachdem der Stoff in die Flüssigkeit gelangt ist.

a.) Erstellen Sie eine Wertetabelle.

t	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
f(t)	0,000	4,997	6,451	6,630	6,632	6,371
t	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
f(t)	5,972	4,934	4,044	3,311	2,711	1,817

b.) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von $t = 0$ bis $t = 4$ und von $y = 0$ bis $y = 7$



c.) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Stoffes am größten ist und bestimmen Sie diese maximale Konzentration.

$$y = f(t) = 9 \cdot e^{-0,4t} - 9 \cdot e^{-5t}$$

Erklärung:

Wir müssen die erste und die zweite Ableitungsfunktion ermitteln. Extrema finden Sie, indem Sie die erste Ableitung null setzen und nach t auflösen. Die erste Ableitung gibt und die Steigung des Funktionsgraphen an und in einem Maximum bzw. Minimum ist die Steigung null. Dann setzen wir den Wert, den wir für t erhalten haben, in die zweite Ableitungsfunktion ein. Die zweite Ableitungsfunktion gibt uns das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen an. Wenn die zweite Ableitungsfunktion negativ ist, nimmt die Steigung ab (Rechtskurve). Ein Maximum liegt immer in einer Rechtskurve.

Zum Ableiten der e-Funktion $e^{-0,4t}$ müssen wir die Kettenregel anwenden. Der Exponent $-0,4t$ stellt die innere Funktion $h(x)$ dar. Die innere Ableitung $h'(x) = -0,4$ kommt als Faktor nach vorne, der Rest bleibt.

$$f'(t) = 9 \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t} - 9 \cdot (-5) \cdot e^{-5t} = -3,6 \cdot e^{-0,4t} + 45 \cdot e^{-5t}$$

$$f''(t) = -3,6 \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t} + 45 \cdot (-5) \cdot e^{-5t} = 1,44 \cdot e^{-0,4t} - 225 \cdot e^{-5t}$$

$$f'(t) = 0$$

$$-3,6 \cdot e^{-0,4t} + 45 \cdot e^{-5t} = 0 \quad | + 3,6 \cdot e^{-0,4t}$$

$$45 \cdot e^{-5t} = 3,6 \cdot e^{-0,4t} \quad | : 3,6 \quad | : e^{-5t}$$

$$\frac{45}{3,6} = \frac{e^{-0,4t}}{e^{-5t}} \quad 12,5 = e^{-0,4t - (-5t)} = e^{4,6t} \quad | \ln$$

$$4,6t = \ln(12,5) \quad | : 4,6 \quad t = \ln(12,5) / 4,6 \approx 0,549$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die zweite Ableitungsfunktion ein, um zu überprüfen, ob an dieser Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$f''(0,549) = 1,44 \cdot e^{-0,4 \cdot 0,549} - 225 \cdot e^{-5 \cdot 0,549} \approx -13,2946$$

Die hinreichende Bedingung für ein Maximum ist erfüllt.

Um die y-Koordinate des Maximums zu bestimmen, müssen wir noch den Wert, den wir für t erhalten haben in die ursprüngliche Funktionsgleichung einsetzen.

$$f(0,549) = 9 \cdot e^{-0,4 \cdot 0,549} - 9 \cdot e^{-5 \cdot 0,549} \approx 6,647 \quad H(0,549 \mid 6,647)$$

Die maximale Konzentration wird nach ca. 0,549 h, also nach knapp 33 Minuten erreicht und beträgt ca. 6,647 mg / Liter.

d.) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Stoffes am stärksten abnimmt. Wie stark nimmt die Konzentration dann ab?

Erklärung:

Wir suchen den Punkt, in dem der Funktionsgraph die geringste Steigung hat. An dieser Stelle nehmen die Funktionswerte am stärksten ab. Dieser Punkt ist der Wendepunkt. Bis zum Wendepunkt nimmt die Steigung immer mehr ab (Rechtskurve), im Wendepunkt selbst nimmt die Steigung weder zu noch ab, ab dem Wendepunkt nimmt die Steigung wieder zu (Linkskurve).

Die zweite Ableitungsfunktion gibt uns das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen an. Wenn die zweite Ableitungsfunktion null ist, nimmt die Steigung weder zu noch ab.

Wenn zusätzlich an dieser Stelle die dritte Ableitungsfunktion ungleich null ist, dann liegt der Punkt genau am Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve (oder umgekehrt).

$f''(t) > 0$ bedeutet: Übergang von Rechts- in Linkskurve (Wendepunkt mit minimaler Steigung)

$f''(t) < 0$ bedeutet: Übergang von Links- in Rechtskurve (Wendepunkt mit maximaler Steigung)

$$f''(t) = 1,44 \cdot e^{-0,4t} - 225 \cdot e^{-5t} \quad (\text{siehe Aufgabe c})$$

$$f''(t) = 0$$

$$1,44 \cdot e^{-0,4t} - 225 \cdot e^{-5t} = 0 \quad | + 225 \cdot e^{-5t}$$

$$1,44 \cdot e^{-0,4t} = 225 \cdot e^{-5t} \quad | : 1,44 \quad | : \cdot e^{-5t}$$

$$\frac{e^{-0,4t}}{e^{-5t}} = \frac{225}{1,44} \quad e^{-0,4t - (-5t)} = e^{4,6t} = 156,25 \quad | \ln$$

$$4,6t = \ln(156,25) \quad | : 4,6 \quad t = \ln(156,25) / 4,6 \approx 1,098$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die dritte Ableitungsfunktion ein, um zu überprüfen, ob an dieser Stelle tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.

$$f'''(t) = 1,44 \cdot (-0,4) \cdot e^{-0,4t} - 225 \cdot (-5) \cdot e^{-5t} = -0,576 \cdot e^{-0,4t} + 1125 \cdot e^{-5t}$$

$$f'''(1,098) = -0,576 \cdot e^{-0,4 \cdot 1,098} + 1125 \cdot e^{-5 \cdot 1,098} \approx 4,2693 > 0$$

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist erfüllt. Es handelt sich um einen Wendepunkt mit minimaler Steigung (Übergang von Rechts- in Linkskurve).

Nach 1,098 h, also nach ca. 1 Stunde, 5 Minuten und 53 Sekunden nimmt die Konzentration des Stoffes in der Flüssigkeit am stärksten ab.

Erklärung: Um festzustellen, wie stark die Konzentration des Stoffes in der Flüssigkeit abnimmt, müssen wir den Wert, den wir für t erhalten haben, in die erste Ableitungsfunktion $f'(t)$ einsetzen. $f'(t)$ gibt uns die Steigung des Funktionsgraphen an, also wie stark die Konzentration des Stoffes ansteigt bzw. abnimmt.

$$f'(t) = -3,6 \cdot e^{-0,4t} + 45 \cdot e^{-5t} \quad (\text{siehe Aufgabe c})$$

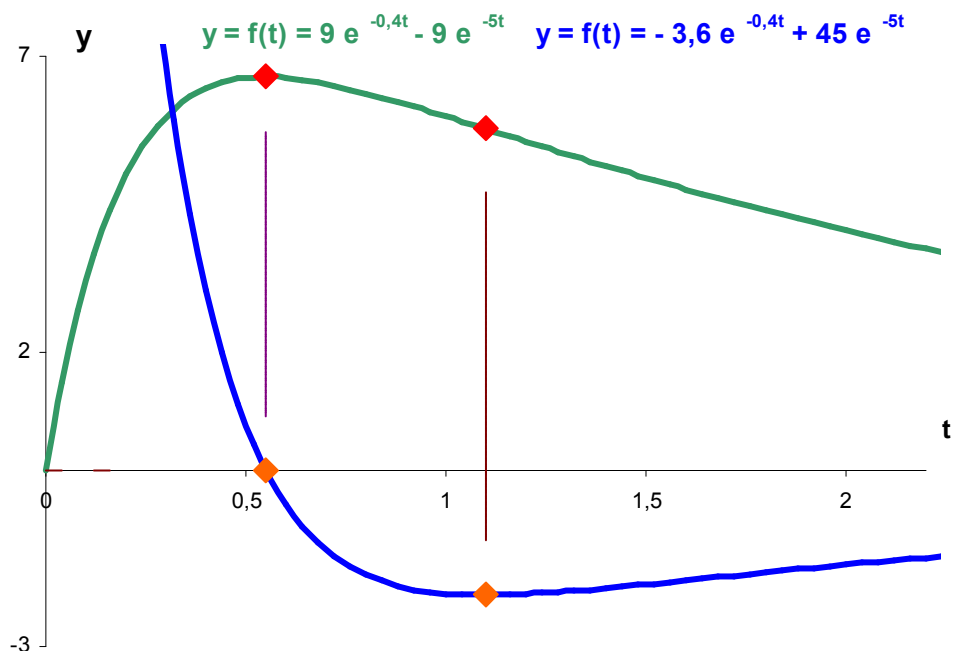
$$f'(1,098) = -3,6 \cdot e^{-0,4 \cdot 1,098} + 45 \cdot e^{-5 \cdot 1,098} \approx -2,135$$

Die stärkste Abnahme der Konzentration des Stoffes tritt nach 1,098 h auf und beträgt ca. 2,135 mg / (Liter · h)

Erklärung: Die Einheit der Konzentration des Stoffes beträgt mg / Liter (Milligramm pro Liter). Die Einheit für die Änderung der Konzentration enthält auch die Zeiteinheit. Diese Änderung wird angegeben in Milligramm pro Liter pro Stunde. Die Einheit ist somit mg / (Liter · h)

Zusatzinformation:

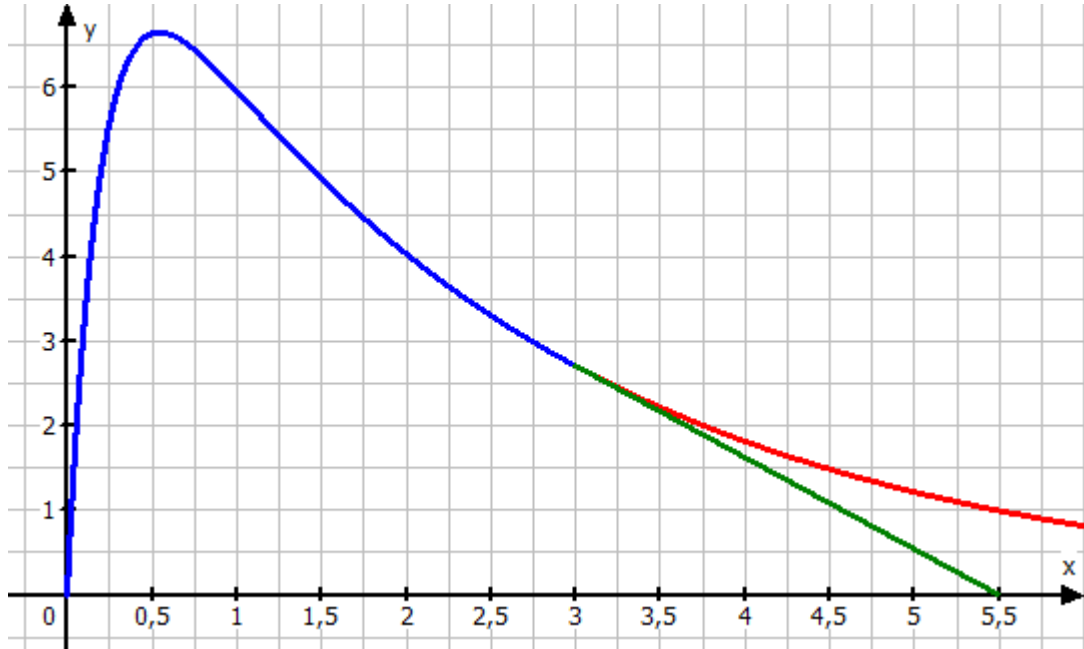
Außer dem Verlauf des Graphens von $f(t)$ ist hier noch zusätzlich der Verlauf des Graphens der Ableitungsfunktion dargestellt.



An der Stelle, an der der Graph von $f(t)$ sein **Maximum** hat (größte Konzentration des Stoffes) hat die Ableitungsfunktion eine Nullstelle. Im Maximum beträgt die Steigung null und die Ableitungsfunktion gibt uns die Steigung an.

An der Stelle, an der der Graph von $f(t)$ seinen **Wendepunkt** hat (größte Abnahme der Konzentration des Stoffes) hat der Graph der Ableitungsfunktion sein Minimum. Der Graph der Ableitungsfunktion gibt uns die Änderung der Konzentration des Stoffes an. Ist $f'(t) > 0$, dann nimmt die Konzentration des Stoffes zu, ist $f'(t) < 0$, nimmt sie ab. An der Stelle, an der $f'(t)$ ein Minimum hat, nimmt die Konzentration des Stoffes am stärksten ab.

e.) Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration soll ab dem Zeitpunkt $t = 3$ durch eine lineare Funktion g beschrieben werden, die Graphen der Funktion f ohne „Knick“ fortführt. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion g und den Zeitpunkt, ab dem der Stoff in der Flüssigkeit vollständig abgebaut ist.



Erklärung: Unsere Funktionsgleichung ist nur ein „Modell“, das die Wirklichkeit möglichst gut widerspiegeln soll. Tatsächlich ist es so, dass der Stoff ab einem bestimmten Zeitpunkt vollständig abgebaut ist. Unsere ursprüngliche Funktionsgleichung spiegelt dies nicht wider und daher ersetzen wir sie ab einem bestimmten Zeitpunkt (hier $t = 3$) durch eine Geradengleichung (grün eingezeichnet).

Bestimmung der Geradengleichung: (für $t = 3$ haben $f(t)$ und $g(t)$ sowohl den gleichen Funktionswert, also y -Wert, als auch die gleiche Steigung)

$$y = f(3) \approx 2,710745 \quad (\text{die Konzentration des Stoffes nach drei Stunden})$$

$$m = f'(3) \approx -1,084285 \quad (\text{die Steigung des Graphens nach drei Stunden})$$

$$y = m \cdot t + b \quad \text{Wir setzen } y = 2,710745 ; m = -1,084285 \text{ und } t = 3 \text{ ein und lösen nach } b \text{ auf.}$$

$$b = y - m \cdot t = 2,710745 - (-1,084285) \cdot 3 \approx 5,9636$$

$$\text{Die Geradengleichung: } g(t) = -1,084285 \cdot t + 5,9636$$

$$\text{Nun bestimmen wir die Nullstelle der Geraden: } -1,084285 \cdot t + 5,9636 = 0 \quad t = 5,5$$

Nach 5,5 h (5h 30 Min.) ist der Stoff in der Flüssigkeit vollständig abgebaut.

f.) Bestimmen Sie die mittlere Konzentration des Stoffes zwischen 30 Minuten und 1 h 15 Minuten nachdem der Stoff in die Flüssigkeit gelangt ist.

Hinweis: 15 Minuten entsprechen einer Viertelstunde, also 0,25 h.

$$\begin{aligned}
 & \int_{0,5}^{1,25} (9 \cdot e^{-0,4t} - 9 \cdot e^{-5t}) dt = [-22,5 \cdot e^{-0,4t} + 1,8 \cdot e^{-5t}]_{0,5}^{1,25} \\
 & = -22,5 \cdot e^{-0,4 \cdot 1,25} + 1,8 \cdot e^{-5 \cdot 1,25} - (-22,5 \cdot e^{-0,4 \cdot 0,5} + 1,8 \cdot e^{-5 \cdot 0,5}) \\
 & = -13,6469 + 0,00347 - (-18,4214 + 0,14775) = -13,64347 - (-18,2737) \\
 & = 4,63022
 \end{aligned}$$

Die Fläche, die im Intervall $[0,5;1,25]$ vom Graphen der Funktion $y = f(t) = 9 \cdot e^{-0,4t} - 9 \cdot e^{-5t}$ und der x-Achse begrenzt wird, beträgt 4,63022 FE (Flächeneinheiten).

Die Oberkante des roten Rechtecks stellt den Mittelwert im Intervall $[0,5;1,25]$ dar. Also muss die Fläche dieses roten Rechtecks ebenfalls 4,63022 FE betragen. Die Breite dieses Rechtecks (die Intervallbreite) beträgt 0,75 LE. Die Höhe des Rechtecks berechnet sich aus Fläche / Breite.

$4,63022 \text{ FE} / 0,75 \text{ LE} = 6,1736 \text{ LE}$.

Die mittlere Konzentration des Stoffes in der Flüssigkeit beträgt somit im Zeitraum 0,5 h bis 1,25 h ca. 6,1736 mg / Liter.

